

基于权马尔科夫链模型的河套灌区上中下游 地下水埋深预测研究

李 彬^{1,2}, 史海滨¹, 李 祯¹, 张建国³, 周 俊⁴

(1. 内蒙古农业大学 水利与土木建筑工程学院, 内蒙古 呼和浩特 010018;

2. 内蒙古农牧业科学院 资源环境与检测技术研究所, 内蒙古 呼和浩特 010031;

3. 巴彦淖尔市水利科学研究所, 内蒙古 临河 015000; 4. 内蒙古河套灌区解放闸管理局, 内蒙古 杭锦旗 015400)

摘 要: 以拓展和深化区域地下水埋深预测研究为目的, 运用随机理论, 建立了基于加权马尔科夫链的地下水埋深预测模型, 预测内蒙古河套灌区上中下游在未来时段内地下水埋深所处区间值。结果表明: 节水改造后灌区中游区的地下水埋深更多的时候处于[2.380, 2.742]区间, 下游区的地下水埋深更多的时候处于[2.218, 2.506]区间, 这两个区间的数值都低于内蒙古河套灌区的临界地下水埋深 2.0 m, 在未来的一段时间河套灌区中下游的盐渍化有望进一步减轻。而上游区的地下水埋深更多的时候处于[1.227, 1.727]区间, 此区间的数值高于内蒙古河套灌区的临界地下水埋深 2.0 m, 在未来的时间河套灌区上游是控制地下水埋深的重点区域。

关键词: 节水改造; 地下水埋深; 马尔科夫链; 预测; 河套灌区

中图分类号: S273.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-7601(2014)05-0206-07

Prediction research on the groundwater table in upstream, midstream and down stream of Hetao Irrigation District based on weighted Markov Chain Model

LI Bin^{1,2}, SHI Hai-bin¹, LI Zhen¹, ZHANG Jian-guo³, ZHOU Jun⁴

(1. *The College of Water Conservancy and Civil Engineering, Inner Mongolia Agriculture University, Hohhot, Inner Mongolia 010018, China*; 2. *Institute of Resources and Environment and Testing Technology of Inner Mongolia Academy of Agricultural and Animal Husbandry Sciences, Hohhot, Inner Mongolia 010031, China*;

3. *Institute of Water Conservancy Science, Inner Mongolia Bayannur, Linhe, Inner Mongolia 015000, China*;

4. *Inner Mongolia Irrigation District Jiefangzha Department, Hangjin Houqi, Inner Mongolia 015400, China*)

Abstract: This paper taken expanding and deepening the regional prediction research on the groundwater table as the purpose, adopted the random theory to establish the groundwater table prediction model based on the weighted Markov Chain to predict the interval value of groundwater table in the upstream, midstream and downstream of Hetao Irrigation District, Inner Mongolia. The result showed that: After the water saving rehabilitation, the groundwater table in mid-stream of Irrigation District will be at the interval of 2.380 to 2.742 and the groundwater table in downstream will be at the interval of 2.218 to 2.506. These two interval values are total larger than the critical groundwater depth of 2.0 m in Hetao Irrigation District, Inner Mongolia. So the salinization in middle and down stream of the Hetao Irrigation District will be expected to further alleviate in future. While the groundwater table in upstream will be at the interval of 1.227 to 1.727. These interval values are total less than 2.0 m which is the critical groundwater depth in the Hetao Irrigation District, Inner Mongolia. Therefore, the upstream of Hetao Irrigation District will be the key control region for groundwater table in future.

Keywords: water-saving rehabilitation; groundwater table; Markov Chain; prediction; Hetao Irrigation District

收稿日期: 2014-02-08

基金项目: 国家“十二五”科技支撑计划项目(2011BAD29B03); 内蒙古科技攻关与政府专项科研项目(nsn200767)

作者简介: 李 彬(1982—), 男, 内蒙古集宁县人, 工程师, 博士, 主要从事节水灌溉新技术方面的研究。E-mail: libin_kim@sina.com。

通信作者: 史海滨(1961—), 男, 山西太谷人, 教授, 博士生导师, 主要从事节水灌溉原理及应用研究。E-mail: shi_haibin@sohu.com。

地下水埋深是决定一个区域土壤是否产生盐渍化的重要因素,而针对土壤次生盐渍化问题提出的地下水临界深度(Critical Dept)是控制地下水埋深的重要指标,它是保证土壤不产生盐渍化和作物不受盐害所要求保持的地下水最小埋藏深度。随着内蒙古河套灌区节水改造的实施,节水改造后地下水埋深在未来时间将处于一个怎样的状态?节水改造工程能否有效地将地下水埋深降低到临界深度以下?对上述问题的研究,对灌区盐渍化的防治及灌区用水管理有着重要而深远意义^[1]。

内蒙古河套灌区地下水主要靠灌溉入渗、大气降水、河流侧渗及来自山前倾斜平原的侧向径流补给;潜水蒸发是灌区地下水的主要排泄方式。灌区地下水动态属灌溉入渗-蒸发型。地下水的动态是该地区气象、水文、地质、开采和补给等诸因素对地下水均衡影响的综合结果,而这些影响因素往往具有随机变化特征,是时间 t 的非确定性函数,故地下水埋深变化具有随机特性。因此,采用随机过程马尔可夫链模型预测未来时刻灌区地下水埋深,在理论上是可行的。

基于马尔可夫链的预测方法大致分为三类,即马尔可夫链预测(ADMCP)方法、叠加马尔可夫链预测(SPMCP)方法和加权马尔可夫链预测(WMCP)方法。就预测精度而言,WMCP方法预测精度最高,SPMCP方法预测精度次之,ADMCP方法预测精度相对来讲最差。就计算原理来讲,ADMCP方法默认所论马尔可夫链满足“齐次性”缺乏依据,在实际所论及的随机变量序列,虽然满足“马氏性”,但一般并不满足“齐次性”,而且,该法没有考虑对应各阶(各种步长)马尔可夫链的绝对分布在预测中所起的作用,这样就没有充分利用已知数据资料的信息。SPMCP方法尽管运用了各阶马尔可夫链状态的绝对分布叠加来预测状态,但没有考虑各阶马尔可夫链对应的绝对概率在叠加中所起的作用,即认为各阶马尔可夫链的绝对概率所起的作用是等同的,这显然不合理。而WMCP方法在充分考虑对应各阶(各种步长)马尔可夫链的绝对分布在预测中所起的作用的同时,引入权重用以表征各步长滞时的转移概率矩阵对预测结果的影响的强弱关系,显然这样的考虑更加合理^[2]。

基于以上论述,本文采用加权马尔可夫链预测(WMCP)方法对内蒙古河套灌区地下水埋深进行预测。

1 马尔可夫链及权马尔可夫链预测概述

马尔可夫链(Markov Chain)模型是由俄罗斯数

学家马尔科夫于1906年—1912年间研究并提出的一种研究自然过程的一般数学模型。马尔可夫链是状态和时间均离散的马尔可夫过程(随机过程的一个分支),它的最基本特征是:“马氏性”,也称“无后效性”,即在系统“现在”的状态已知的条件下,其“将来”的状态与“过去”的状态无关;应用它解决各种预测问题的基本思想是:如果具各种状态的某种事物或某种现象的时间序列满足马尔可夫性,则根据 m 时刻的状态即可预测 $m+l$ 时刻的状态^[3-6]。

1.1 马尔可夫链数学描述

定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的随机序列 $\{X(t), t \in T\}$,其中参数集 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$,状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$,称为马尔可夫链,如果对任意的正整数 l, m, k ,及任意的非负整数 $j_l > \dots > j_2 > j_1 (m > j_l), i_{m+k}, i_m, i_{j_l}, \dots, i_{j_2}, i_{j_1} \in E$

$$P\{X_{(m+k)} = i_{m+k} | X_{(m)} = i_m, X_{(j_l)} = i_{j_l}, \dots, X_{(j_2)} = i_{j_2}, X_{(j_1)} = i_{j_1}\} = P\{X_{(m+k)} = i_{m+k} | X_{(m)} = i_m\}$$

(1)

成立。这里要求式(1)的左端有意义,即假定:

$$P\{X_{(m)} = i_m, X_{(j_l)} = i_{j_l}, \dots, X_{(j_2)} = i_{j_2}, X_{(j_1)} = i_{j_1}\} > 0.$$

(2)

实际应用中,常记式(1)的右端

$$P\{X_{(m+k)} = i_{m+k} | X_{(m)} = i_m\} = P\{X_{m+k} = j | X_m = i\} = p_{ij}(m; k), i, j \in E$$

(3)

实际应用中,一般考虑齐次马尔可夫链,即对任意 $k, m \in N^+$,有

$$p_{ij}(m, k) = p_{ij}(k) \quad i, j = 0, 1, \dots$$

(4)

其中 $p_{ij}(m, k)$ 表示“系统于 m 时段状态为 i ,经 k 步转移至状态 j 的概率”, $p_{ij}(k)$ 表示“从状态 i 经 k 步转移至状态 j 的概率”。此时转移概率与初始时刻无关, k 取 1 时, $p_{ij}(1)$ 记为 p_{ij} 。

齐次的马尔可夫链 $\{X(t)\}$ 完全由其初始分布 $\{p_0(i_0), i_0 \in E\}$ 及其一步状态转移概率矩阵 $P = (p_{ij}), i, j \in E$ 所决定^[7]。

1.2 加权马尔可夫链预测的思路

由于每个时段的地下水埋深是一列相依的随机变量,各阶自相关系数刻画了各种滞时(各个时段)的地下水埋深间的相关关系及其强弱。因而,可考虑先分别依其前面若干时段的地下水埋深对该时段地下水埋深状况进行预测,然后,按前面各时段与该时段相依关系的强弱加权求和,即达到充分、合理利用信息进行预测的目的。这就是加权马尔可夫链预测的基本思想^[8]。

1.3 加权马尔科夫链预测步骤

基于以上的思路,加权马尔可夫链预测的具体方法步骤如下^[8-10]:

1) 以样本均方差为标准,建立地下水埋深的分级标准,确定状态空间。

2) 对地下水埋深序列作马氏性检验。

3) 计算地下水埋深序列各阶自相关系数 r_k ,并对各阶自相关系数规范化。

4) 统计确定不同滞时(步长)的马尔可夫链的转移概率矩阵。

5) 分别以前面若干月的地下水埋深为初始状态,结合其相应的转移概率矩阵即可预测出该月地下水埋深的状态概率 $P_i^{(k)}$, $i \in E$, k 为滞时(步长), $k = 1, 2, \dots, m$ 。

6) 将同一状态各预测概率加权和作为地下水埋深处于该状态的预测概率,即,当满足条件 $\max\{P_i, i \in E\} > 0.5$ 时,根据最大隶属度原则,取 $\max\{P_i, i \in E\}$ 所对应的状态 i 为该时段地下水埋深所处的状态;否则采用级别特征值法判断其状态,若 $-0.5 < S - i < 0.5$,则该时段地下水埋深所处状态为 i ;应用级别特征值求出该时段具体的地下水埋深,并将其与实测值比较。

7) 求解级别特征值:先做归一化处理, $d_i = P_i^\alpha / \sum_{i=1}^5 P_i^\alpha$ 式中 α 为最大概率的作用系数,其值通常取 2 或 4,其值越大,越突出最大概率的作用。定义: $S =$

$\sum_{i=1}^5 id_i$ 为级别特征值。如果根据最大概率确定的状态为 i ,且 $S > i$,则预测值为 $U_i S_i / (i + 0.5)$;如果 $S \leq i$,则预测值为 $L_i S_i / (i - 0.5)$,其中 U_i, L_i 分别为状态 i 区间值的上限和下限。待该年地下水埋深确定后,将其加入原序列,再重复步骤(1) ~ (8),可进行下一月份地下水埋深的预测。级别特征值的最大优点是既考虑了最大概率的影响,又综合考虑了其他概率的影响。

8) 进一步对该马尔可夫链的特征(遍历性、平稳分布等)进行分析。

2 材料与方法

2.1 试验设计与数据采集

研究区分别设在内蒙古河套灌区的上游(杭锦旗),中游(临河)和下游(乌拉特前旗),见图 1。在上游区布设水位观测井 16 眼,中游区布设 14 眼,下游区布设 14 眼,观测井根据地形条件,采用井深 10 m 的普通观测井,井管下端用直径 7.62 cm 塑料管,上部用 1.5 m 长的钢管加帽,并用混凝土加固,防止丢失。在 14 个观测井附近埋设 TDR 管测定相应的土壤体积含水率,井位布设位置根据地表植被情况及土壤盐渍化程度确定。

数据采集时间为 2007 年 7 月—2010 年 11 月,每月的 1 日、11 日和 21 日采集地下水埋深数据。

测量方法是采用手工法测量地下水埋深。

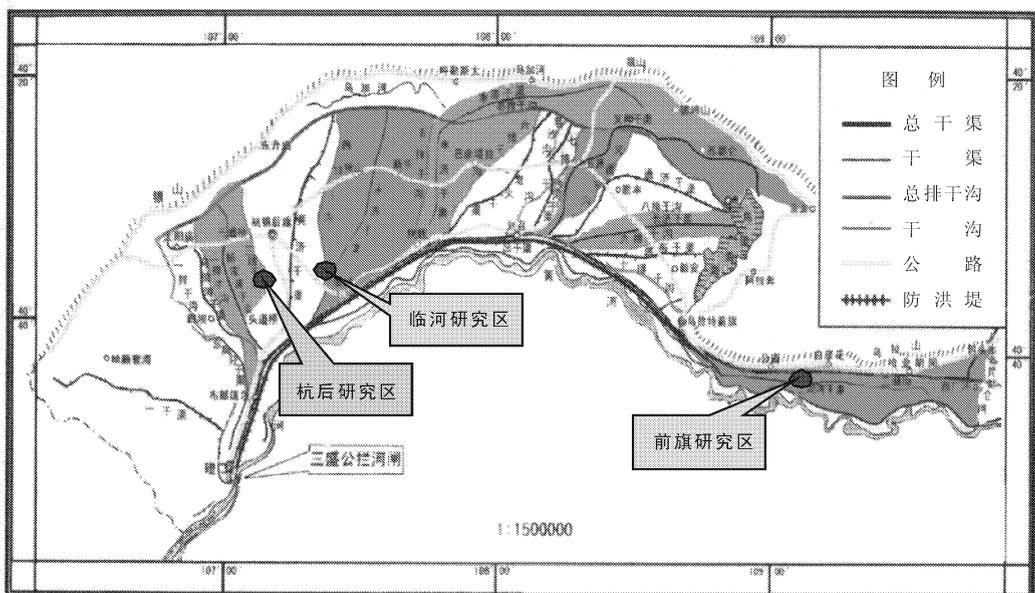


图 1 内蒙古河套灌区研究区分布示意图

Fig. 1 The schematic diagram of the research area distribution in He Tao Irrigation District, Inner Mongolia

2.2 数据处理

将每月的 1 日、11 日和 21 日采集的数据取平均值作为该月的地下水埋深,将每个研究区所有井位的地下水埋深取平均值作为该研究区的地下水埋深。

3 结果与分析

以下游区 2007 年 7 月—2010 年 7 月的地下水埋深资料为例,应用加权马尔可夫链模型进行分析预测。

1) 建立地下水埋深分级标准,根据表可算得(2007 年 7 月—2010 年 7 月)地下水埋深的平均值: $\bar{x} = 2.561$,均方差: $s = 0.362$ 。

根据上述计算结果,如表(1)将地下水埋深划分为 5 个级别(对应马尔可夫链的 5 个状态)。

表 1 下游区地下水埋深分级表

Table 1 Classification of groundwater table in lower reaches area

状态 Status	分级标准 Classification criteria	数值区间/m Interval value
1	$x \geq \bar{x} + 1.0s$	$x \geq 2.923$
2	$\bar{x} + 0.5s \leq x < \bar{x} + 1.0s$	$2.742 \leq x < 2.923$
3	$\bar{x} - 0.5s \leq x < \bar{x} + 0.5s$	$2.380 \leq x < 2.742$
4	$\bar{x} - 1.0s \leq x < \bar{x} - 0.5s$	$2.199 \leq x < 2.380$
5	$x < \bar{x} - 1.0s$	$x < 2.199$

2) 按照表的分级标准确定 2007 年 7 月—2010 年 7 月地下水埋深的空间状态,见表 2。

表 2 河套灌区下游区 2007 年 7 月—2010 年 7 月地下水埋深及其空间状态

Table 2 Groundwater table and its space status during July, 2007 to July, 2010 in downstream of Hetao Irrigation

序列 Sequence	时间 Time (Y - M)	地下水埋深/m Ground water table	状态 Status	序列 Sequence	时间 Time (Y - M)	地下水埋深/m Ground water table	状态 Status
1	2007-07	2.238	4	21	2009-03	2.823	2
2	2007-08	2.317	4	22	2009-04	2.652	3
3	2007-09	2.519	3	23	2009-05	2.661	3
4	2007-01	2.708	3	24	2009-06	3.009	1
5	2007-11	1.880	5	25	2009-07	3.302	1
6	2007-12	1.790	5	26	2009-08	3.065	1
7	2008-01	2.448	3	27	2009-09	2.926	1
8	2008-02	2.686	3	28	2009-01	2.970	1
9	2008-03	2.787	2	29	2009-11	2.393	3
10	2008-04	2.619	3	30	2009-12	2.058	5
11	2008-05	2.440	3	31	2010-01	2.339	4
12	2008-06	2.197	5	32	2010-02	2.589	3
13	2008-07	2.382	3	33	2010-03	2.881	2
14	2008-08	2.842	2	34	2010-04	2.993	1
15	2008-09	2.753	2	35	2010-05	3.008	1
16	2008-01	2.179	5	36	2010-06	2.465	3
17	2008-11	2.053	5	37	2010-07	2.428	3
18	2008-12	1.926	5	38	2010-08		
19	2009-01	2.677	3	39	2010-09		
20	2009-02	2.746	2				

3) 对 37 个月的地下水埋深作马氏性检验。由表 2 提供资料可得,转移频数矩阵(f_{ij})和一步转移概率矩阵 P_{ij}

$$f_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ 1/13 & 4/13 & 5/13 & 0 & 3/13 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7143 & 0.0000 & 0.2857 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.1667 \\ 0.0769 & 0.3077 & 0.3846 & 0.0000 & 0.2308 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.3333 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4286 & 0.1429 & 0.4286 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\chi^2 = 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 f_{ij} \left| \log \frac{P_{ij}}{\bar{P} \cdot j} \right| = 39.1044$, 给定显著水平 $\alpha = 0.05$, 查表可得分位点 $\chi^2_{\alpha}((5-1)^2) = \chi^2_{\alpha}(16) = 26.30$, 因为 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}((m-1)^2)$, 所以地下水埋深序列满足马氏性。

4) 利用 Matlab7.1 编程计算地下水埋深序列各阶自相关系数及其规范化, 结果见表 3。

表 3 各阶自相关系数和各种步长的马尔可夫链权重

Table 3 Each autocorrelation coefficient and weights of the Markov Chain

r_k	0.5757	0.0388	-0.1716	-0.0728	0.0745
w_k	0.6168	0.0416	0.1838	0.0780	0.0798

5) 根据表 2 经统计计算得到步长为 1, 2, 3, 4, 5 马尔可夫链的转移概率矩阵:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ 1/13 & 4/13 & 5/13 & 0 & 3/13 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 3/6 & 0 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 3/6 & 0 & 2/6 \\ 3/11 & 3/11 & 2/11 & 1/11 & 2/11 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/7 & 4/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 2/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 0 & 3/6 \\ 3/12 & 1/12 & 6/12 & 0 & 2/12 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 5/7 & 2/7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/6 & 0 & 3/6 & 0 & 1/6 \\ 2/12 & 3/12 & 5/12 & 0 & 2/12 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/7 & 3/7 & 2/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 4/12 & 2/12 & 3/12 & 0 & 3/12 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/7 & 1/7 & 4/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

6) 根据 2007 年 7 月—2010 年 7 月的地下水埋深资料及其相应的状态转移概率矩阵对 2010 年 8 月的地下水埋深状态进行预测, 结果如表 4 所示。

7) 由表(4)可知, $\max \{P_i, i \in E\} = 0.3532 < 0.5$, 故采用级别特征值法判断其状态。

8) 通过计算得, 2010 年 8 月的地下水埋深的状态是 3, 对应地下水埋深区间为 [2.380, 2.742), 而 2010 年 8 月的实测地下水埋深为 2.563 m, 当 α 取 2 时, 可求出具体的预测值为 2.737 m, 误差为 6.79%。当 α 取 4 时, 可求出具体的预测值为 2.785 m, 误差为 8.65%。

表 4 2010 年 8 月地下水埋深状态预测表

Table 4 State prediction for monthly groundwater table in August, 2010

初始月 Beginning	状态 Status	滞时/月 Lag time/month	权重 Weight	状态 1 Status 1	状态 2 Status 2	状态 3 Status 3	状态 4 Status 4	状态 5 Status 5	概率来源 Probability source
2010-07	3	1	0.6168	1/13	4/13	5/13	0	3/13	$P^{(1)}$
2010-06	3	2	0.0416	3/11	3/11	2/11	1/11	2/11	$P^{(2)}$
2010-05	1	3	0.1838	2/6	0	2/6	1/6	1/6	$P^{(3)}$
2010-04	1	4	0.0780	1/5	0	2/5	1/5	1/5	$P^{(4)}$
2010-03	2	5	0.0798	2/5	2/5	1/5	0	0	$P^{(5)}$
	P_i (加权) Weighted sum			0.1676	0.2331	0.3532	0.0500	0.1961	
	S_2 (级别特征值) Status value						2.874		
	S_4 (级别特征值) Status value						2.925		

将 2010 年 8 月的地下水埋深加入到原资料序列中, 同理以 2007 年 7 月—2010 年 8 月的地下水埋深资料预测 2010 年 9 月的地下水埋深及其状态, 预测结果见表 5。

由表 5 可知, $\max \{P_i, i \in E\} = 0.4375 < 0.5$, 故采用级别特征值法判断其状态。

通过计算得, 2010 年 9 月的地下水埋深的状态是

3, 对应地下水埋深区间为 [2.383, 2.740), 而 2010 年 9 月的实测地下水埋深为 2.488 m, 当 α 取 2 时, 可求出具体的预测值为 2.882 m, 误差为 15.84%。当 α 取 4 时, 可求出具体的预测值为 2.872 m, 误差为 15.43%。因为中长期水文预报的复杂性, 一般认为其相对误差小于 20% 就已经令人满意^[11]。这充分说明应用本方法进行地下水埋深的中长期预报是可行、有效的。

表 5 2010 年 9 月地下水埋深状态预测表

Table 5 State prediction for monthly groundwater table in September, 2010

初始月 Beginning	状态 Status	滞时/月 Lag time/month	权重 Weight	状态 1 Status 1	状态 2 Status 2	状态 3 Status 3	状态 4 Status 4	状态 5 Status 5	概率来源 Probability source
2010-08	3	1	0.6169	1/14	4/14	6/14	0	3/14	$P^{(1)}$
2010-07	3	2	0.0416	3/12	3/12	3/12	1/12	2/12	$P^{(2)}$
2010-06	3	3	0.1837	3/12	1/12	6/12	0	2/12	$P^{(3)}$
2010-05	1	4	0.0778	1/6	0	3/6	1/6	1/6	$P^{(4)}$
2010-04	1	5	0.0800	0	1/5	2/5	1/5	1/5	$P^{(5)}$
P_i (加权) Weighted sum				0.1133	0.2180	0.4375	0.0324	0.1987	
S_2 (级别特征值) Status value							3.023		
S_4 (级别特征值) Status value							3.013		

9) 马尔可夫链的特征分析(遍历性与平稳分布分析):由表 5、6 可知,步长为 1 的马尔可夫链的相依性较强,故以此链的特征分析为例。由其状态转移概率:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ 1/13 & 4/13 & 5/13 & 0 & 3/13 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7143 & 0.0000 & 0.2857 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.1667 \\ 0.0769 & 0.3077 & 0.3846 & 0.0000 & 0.2308 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.3333 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4286 & 0.1429 & 0.4286 \end{bmatrix} \quad (7)$$

可得其状态转移图如图 2 所示。

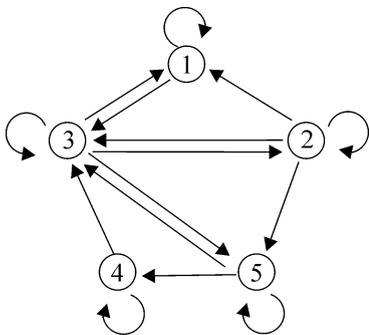


图 2 状态转移示意图

Fig.2 Schematic diagram of state transfer

由图 2 可知, $P^{(1)}$ 所决定的马尔可夫链的 5 个状态是互通的,即对 $\forall i, j \in E, i \leftrightarrow j (i \neq j)$, 且为非周期的,其全部状态(5 个状态)构成的状态空间是一个闭集,即就是该链的状态空间 E ,故此链是不可约的。该链为状态空间有穷(5 个状态)的不可约马尔可夫链,故而该链的 5 个状态都是正常返的。据上述可知,所以,该链是遍历的(非周期、不可约,正常

返)。因此,根据遍历性定理,该链存在唯一的平稳分布,且此时的平稳分布即为它的极限分布。

设此链的平稳分布为 $\{\pi_j, j \in E\}$, 极限分布求解方程为:

$$\sum_{j \in E} \pi_j = 1, \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, j \in E \quad (8)$$

式中, i, j 为状态; π_i, π_j 分别为状态 i, j 的平稳分布; p_{ij} 为状态 i 到 j 的一步转移概率。

根据步长为 1 的转移矩阵 $P^{(1)}$ 及式(8)得方程组

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \\ 0.0000\pi_1 + 0.3333\pi_2 + 0.3077\pi_3 + 0.0000\pi_4 + 0.0000\pi_5 = \pi_2 \\ 0.2857\pi_1 + 0.3333\pi_2 + 0.3846\pi_3 + 0.6667\pi_4 + 0.4286\pi_5 = \pi_3 \\ 0.0000\pi_1 + 0.0000\pi_2 + 0.0000\pi_3 + 0.3333\pi_4 + 0.1429\pi_5 = \pi_4 \\ 0.0000\pi_1 + 0.1667\pi_2 + 0.2308\pi_3 + 0.0000\pi_4 + 0.4286\pi_5 = \pi_5 \end{cases} \quad (9)$$

解方程组得,满足 $\pi_j > 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5), \sum_{j=1}^5 \pi_j = 1$ 的唯一解是: $\pi_1 = 0.2028, \pi_2 = 0.1739, \pi_3 = 0.3768, \pi_4 = 0.0435, \pi_5 = 0.2029$, 由此可解得平稳分布与各状态的重现期如表 6 所示,其中状态 j 的重现期 $T_j = \mu_j = 1/\pi_j$, 对应的概率 $P_i = \pi_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 。

表 6 下游区平稳分布与各状态重现期表

Table 6 Stationary distribution and return period for each status in lower reach area

状态 j Status	1	2	3	4	5
π_j	0.2028	0.1739	0.3768	0.0435	0.2029
$T_j = \mu_j$	4.93a	5.75a	2.65a	22.99a	4.93a

按照本章确定的分级标准,依据现有的资料信息推断,在内蒙古河套灌区下游区地下水埋深状态 3 出现的机会最多,平均每隔 2.65 a 出现 1 次,出现

的概率为 0.3768,也就是说灌区地下水埋深处在 $(2.380 \leq x < 2.742)$ 的机会最大,地下水埋深状态 4 $(2.199 \leq x < 2.380)$ 出现的机会最少,平均每隔 22.99 年出现 1 次,出现的概率为 0.0435,地下水埋深状态 1 $(x \geq 2.923)$ 和 5 $(x < 2.199)$ 出现的机会基本相当,均是平均每隔 4.93 年出现 1 次,出现的概率均为 0.2028。地下水埋深状态 2 $(2.742 \leq x < 2.923)$ 出现的机会次于状态 1 和 5,平均每隔 5.75 年出现 1 次,出现的概率为 0.1739。

同理按照上述的步骤和方法可得到内蒙古河套灌区上游和中游的平稳分布与各状态重现期见表 7、8。

表 7 上游平稳分布与各状态重现期表

Table 7 Stationary distribution and return period for each status in upstream area

状态 j Status	1	2	3	4	5
π_j	0.1969	0.1965	0.2486	0.1485	0.2094
$T_j = \mu_j$	5.08a	5.09a	4.02a	6.73a	4.78a

表 8 中游区平稳分布与各状态重现期表

Table 8 Stationary distribution and return period for each status in middle reaches area

状态 j Status	1	2	3	4	5
π_j	0.1250	0.2750	0.3500	0.1000	0.1500
$T_j = \mu_j$	8.00a	3.64a	2.86a	10.00a	6.67a

4 结 论

1) 地下水埋深是地下水补、径、排条件信息的综合反映,如遇到灌区的工程建设、灌区引水量的减少等影响地下水补、径、排条件的突变事件,就难以做出真切的预测,这也是所有预测模型共同的弱点。本文所建立模型已把突变事件(灌区节水改造)考虑进去,在一般情况下,能够获得较高精度的预测。

2) 预测结果为地下水埋深的某一个状态即预测的是一个区间值,而不是具体数值,在可以完全满足实际工作需要的前提下,预测的范围扩大了,其可靠性会随之有所提高。但是在某些情况下我们仍需要一个具体的数值(如地下水补给量的确定),为此

本文将模糊集理论中的隶属度和级别特征值引入到模型的建立中来,实现了对地下水埋深具体值的预测,增强了模型的预测功能。

3) 应用遍历定理,计算序列的极限分布表明,内蒙古河套灌区中游区的地下水埋深更多的时候处于 $[2.380, 2.742)$ 区间,下游区的地下水埋深更多的时候处于 $[2.218, 2.506)$ 区间,这两个区间的数值都低于内蒙古河套灌区的临界地下水埋深 $2.0 \text{ m}^{[12]}$,在未来的时间河套灌区中下游的盐渍化有望进一步减轻,但随着地下水埋深加大,在灌溉间隙地下水对农田的补给量减少,会影响土壤墒情。而依据上游区的历史资料推断的结果,可以看出上游区的地下水埋深更多的时候处于 $[1.227, 1.727)$ 区间,此区间的数值高于内蒙古河套灌区的临界地下水埋深 2.0 m ,在未来的时间河套灌区上游是控制地下水埋深的重点区域。

参 考 文 献:

- [1] 沈荣开,张瑜芳,杨金忠.对内蒙古河套引黄灌区续建配套节水改造规划中几个问题的认识[J].中国农村水利水电,2001,(4):3-4.
- [2] 夏乐天,朱元胜,马氏链预测方法的统计试验研究[J].工程数学学报,2010,27(2):313-320.
- [3] 宋印胜.马尔可夫链模型在地下水水位预测中的应用[J].山东地质,1998,14(1):34-40.
- [4] 夏乐天.梅雨强度的指数权马尔可夫链预测[J].水利学报,2005,36(8):988-993.
- [5] 彭世彰,魏征,窦超银,等.加权马尔科夫模型在区域干旱指标预测中的应用[J].系统工程理论与实践,2009,29(9):173-178.
- [6] 金星,洪延姬,张明亮,等.马尔科夫模型状态转移概率矩阵的快速计算方法[J].弹箭与制导学报,2005,25(2):244-249.
- [7] 施仁杰.马尔科夫链基础及其应用[M].西安:西安电子科技大学出版社,1992.
- [8] 冯耀龙,韩文秀.权马尔可夫链在河流丰枯状况预测中的应用[J].系统工程理论与实践,1999,(10):89-93.
- [9] 孙才志,张戈,林学钰.加权马尔科夫模型在降水丰枯状况预测中的应用[J].系统工程理论与实践,2003,(4):173-178.
- [10] 陈守煜.水文水资源系统模糊识别理论[M].大连:大连理工大学出版社,1992.
- [11] 王文科,廖健榕.模糊分析在水文地质学中的应用[M].西安:西安地图出版社,1997.
- [12] 赵锁志,刘丽萍,王喜宽,等.河套灌区地下水临界深度的确定及其意义探讨[J].岩矿测试,2008,27(2):108-112.