抛物线形渠道收缩水深简捷计算公式

芦　琴[1]，王正中[1,2*]，任武刚[1]

(1.西北农林科技大学水利与建筑工程学院，陕西 杨凌 712100；
2.中国科学院冻土工程国家重点实验室，甘肃 兰州 730000)

摘　要：根据抛物线形渠道收缩水深的基本方程，经数学变换得到计算收缩水深的迭代公式，并结合收缩水深水力特点证明了该迭代式的收敛性；应用四种方法求得五个初值，运用迭代公式分别进行迭代计算，在误差分析基础上得出最简公式。在工程实用范围内，其最大误差小于0.48%，满足精度要求；该公式简捷、准确、适用范围广，而且克服了以往查图查表及试算迭代法的缺点。

关键词：收缩水深；抛物线形渠道；计算方法

中图分类号：TV131.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-7601(2007)02-0134-03

流速最大水深最小的收缩断面上水力要素的确定是水工水力学中水流衔接状态分析及水跃位置判断的关键。只要确定了收缩水深，最大平均流速也就确定了。明渠断面有各种各样的形式，由于抛物线形断面的衬砌渠道具有冻胀分布均匀，冻胀变形很小且易复位的特点，特别是水力半径小，从而使沿程水头损失小。因而，在水力发电渠道、灌溉渠道、排水渠道、城市给排水工程中以及在南水北调工程的中线和东线工程中应用广泛。但由于抛物线形断面设计及水力计算中，其收缩水深基本方程为含参数的高次方程，理论上无解析解；传统求解方法是用试算法及图解法进行求解，计算过程相当繁琐且误差又大；采用迭代法由于迭代格式的影响及迭代初值选取不当，收敛速度慢，甚至不收敛。为此本文从抛物线形断面收缩水深基本方程入手，对其进行恰当的恒等变形，得到收缩水深的迭代计算公式，并结合收缩断面水力要素的特点，从数学上证明了迭代公式的收敛性，然后运用四种不同方法得到五个初值计算公式，利用这五个公式进行迭代计算。通过误差分析及实例计算可以提出简捷、准确、不依赖图表的计算公式。

1　抛物线形渠道收缩水深基本方程及其无量纲迭代式

根据文献[1]取收缩断面处槽底的水平面为基准面，则收缩断面上的能量方程式为：

$$E_0 = h_{co} + \frac{Q^2}{2g\varphi^2 A_{co}^2} \tag{1}$$

式中，E_0 为上游断面总水头(m)；h_{co} 为收缩水深(m)；Q 为断面流量(m^3/s)；A_{co} 为收缩断面面积(m^2)；φ 为流速系数；g 为重力加速度(m/s^2)。

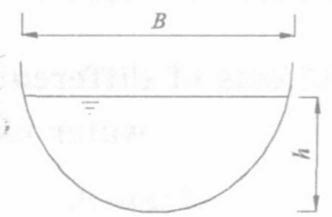

图1　抛物线形断面

Fig.1　Parabola section

设抛物线断面的曲线方程为 $y = px^2$，则其断面面积为

$$A_{co} = \frac{4}{3\sqrt{p}} h_{co}^{3/2} \tag{2}$$

若令无量纲收缩水深：$\lambda = \dfrac{h_{co}}{E_0}$　(3)

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{9pQ^2}{32g\varphi^2 E_0^4}} \tag{4}$$

则可得收缩水深无量纲迭代式

$$\lambda = \beta(1-\lambda)^{-1/3} \tag{5}$$

2　迭代公式收敛性分析

根据迭代法收敛定理[2]，若迭代函数 $x =$

收稿日期：2006-05-25
基金项目：中国科学院冻土工程重点实验室基金(C9901)
作者简介：芦　琴(1979－)，女，新疆石河子人，博士，主要从事水利水电工程研究工作。E-mail：lqyjk0993@126.com.
* **通讯作者**：王正中，E-mail：wangzz0910@yahoo.com.cn.

$\varphi(x)$ 满足(Ⅰ)当 $x\in[a,b]$ 时,$\varphi(x)\in[a,b]$;(Ⅱ)存在正数 $L<1$,使对任意 $x\in[a,b]$ 有 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$,则对任意初值 $x_0\in[a,b]$,迭代数列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程在 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一根。因此,只要能证明以上迭代函数导数的绝对值小于 1,则可以证明该迭代函数是收敛的。

(5) 式中令 $\lambda=\varphi(\lambda)$,则 $\varphi(\lambda)=\beta(1-\lambda)^{-1/3}$,则

$$\varphi'(\lambda)=\frac{\beta}{3}(1-\lambda)^{-4/3} \tag{6}$$

由(5)式得 $(1-\lambda)^{-1/3}=\frac{\lambda}{\beta}$ 代入(6)得

$$\varphi'(\lambda)=\frac{\lambda}{3(1-\lambda)} \tag{7}$$

下面根据收缩断面水力要素的特点,分析(7)式中 λ 及 $\varphi'(\lambda)$ 的取值范围。收缩水深总是小于临界水深,而抛物线形断面临界水深 $h_k=(\frac{27p\varphi Q^2}{32g})^{1/5}$,因流速系数 $\varphi<1$ 代入基本方程知临界流时 $\lambda_k<0.75$;因此

$$0<\lambda<\lambda_k<0.75 \tag{8}$$

由(7)式知 $\varphi'(\lambda)=\frac{\lambda}{3(1-\lambda)}$ 是单调增函数,结合(8)式得

$$\varphi'(\lambda)<1 \tag{9}$$

亦即迭代函数 $\varphi(\lambda)$ 满足收敛条件(Ⅱ);同理可知 $\varphi(\lambda)$ 也满足条件(Ⅰ),因此无量纲迭代式(5)是收敛的。

3　抛物线形断面收缩水深迭代初值选取

3.1　初值选取方法一

由(5)式可得 $\lambda=\beta(1-\lambda)^{-1/3}$,根据文献[3]由于收缩断面上水流动能很大,势能很小,因而该断面收缩水深 h_{co} 远小于总水头 E_0 即 λ 往往远小于 1;因此用马克劳林级数展开其右端取前一项,得到关于 λ 的一元一次方程如下:$0=\beta+(\frac{\beta}{3}-1)\lambda$ 其解即为 λ 的一次近似值,即迭代初值

$$\lambda_0=\frac{3\beta}{3-\beta} \tag{10}$$

3.2　初值选取方法二

由(5)式得 $\beta=\lambda(1-\lambda)^{1/3}$,先令出一组 λ 值,求出相应的 β,利用回归拟合分析找出了二者的关系式作为迭代初值:

$$\lambda_0=1.2\beta \tag{11}$$

3.3　初值选取方法三

根据文献[4]用(5)式进行迭代计算时得到递推公式为:

$$\lambda=\beta\{1-\beta[1-\beta(1-\beta\cdots)^{-1/3}]^{-1/3}\}^{-1/3} \tag{12}$$

根据前面分析 $\lambda<0.75$,而 β 为 λ 的一次近似值,故 $\beta<0.75$,所以用马克劳林展开 $(1-\beta)^{-1/3}$,取前 4 项得:

$$(1-\beta)^{-1/3}=1+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{9}\beta^2+\frac{14}{81}\beta^3 \tag{13}$$

将(13)代入(12)得

$$\lambda=\beta+\frac{\beta^2}{3(1-\beta)}\left\{[1-\beta^{(n-1)}]+\frac{2}{3}\beta[1-\beta^{(n-2)}]+\frac{14}{27}\beta^2[1-\beta^{(n-3)}]\right\}$$

显然上式右端括号内是一个多项式,若设其为 $f(\alpha)$,则可将上式改写为:

$$\lambda=\beta+\frac{\beta^2}{3(1-\beta)}f(\beta) \tag{14}$$

以(5)式计算结果为准,计算出工程实际范围内各数值,并进行回归分析计算得

$$f(\beta)=0.9+0.6\beta \tag{15}$$

则抛物线形断面收缩水深计算公式(14)可近似表达为:

$$\lambda_0=\beta+\frac{0.3\beta^2+0.2\beta^3}{1-\beta} \tag{16}$$

4　抛物线形渠道收缩水深计算公式的精度评价及推荐公式

实际工程中,无量纲收缩水深 $\lambda\in(0,0.5)$,为使各计算式繁简相当,针对以上各初值计算式简易程度进行一次或二次迭代计算,再评价其精度,计算式及误差见表 1。由表 1 可见 λ 在此范围内以(16)式为初值,用(5)式迭代一次的最大相对误差分别为 0.26%;以(10)(11)式为初值,用(5)式迭代二次的最大相对误差分别为 0.86%,0.48%。综合以上结果可得以(11)式为初值迭代二次的公式:

$$\lambda=\beta[1-\beta(1-1.2\beta)^{-1/3}]^{-1/3} \tag{17}$$

为简明起见表 2 给出了(17)式的误差分布,其最大相对误差为 0.48%,因此(17)式满足形式简单、精度高、适用范围广的要求,是抛物线形渠道收缩水深直接计算式的推荐公式。

表1 抛物线形渠道收缩水深计算公式及误差

Table 1 Formula and error of parabola section of water depth at vena contraction

公式号 Number of formula	初值 λ_0 Original λ_0	λ 直接计算公式 Directly calculating formula of λ	最大误差(%) Maximum error
10	$\frac{3\beta}{3-\beta}$	$\lambda_2=\beta[1-\beta(\frac{3-4\beta}{3-\beta})^{-1/3}]^{-1/3}$	0.86
11	1.2β	$\lambda_2=\beta[1-\beta(1-1.2\beta)^{-1/3}]^{-1/3}$	0.48
16	$\beta+\frac{\beta^2(0.3+0.2\beta)}{(1-\beta)}$	$\lambda_1=\beta[1-\beta+\frac{\beta^2(3+0.2\beta)}{(1-\beta)}]^{-1/3}$	0.26

表2 抛物线形渠道收缩水深计算公式误差分布

Table 2 Error margin of parabola section of water depth at vena contraction

β	λ	λ_1	Δ(%)	β	λ	λ_1	Δ(%)
0.0000	0.00	0.00	0	0.2190	0.24	0.2402	0.083
0.0199	0.02	0.02	0	0.2352	0.26	0.2602	0.077
0.0395	0.04	0.04	0	0.2510	0.28	0.2804	0.140
0.0588	0.06	0.06	0	0.2664	0.30	0.3004	0.130
0.0778	0.08	0.08	0	0.2814	0.32	0.3204	0.130
0.0966	0.10	0.1001	0.1	0.2960	0.34	0.3404	0.120
0.1150	0.12	0.12	0	0.3102	0.36	0.3604	0.11
0.1331	0.14	0.14	0	0.3240	0.38	0.3803	0.079
0.1510	0.16	0.1601	0.063	0.3374	0.40	0.4003	0.075
0.1685	0.18	0.1801	0.056	0.3627	0.44	0.4397	−0.068
0.1857	0.20	0.2002	0.091	0.3860	0.48	0.4785	−0.31
0.2025	0.22	0.2202	0.1	0.3969	0.50	0.4976	−0.48

参考文献:

[1] 清华大学.水力学[M].北京:高等教育出版社,1984.

[2] 邓建中,葛仁兴,程正兴.计算方法[M].西安:西安交通大学出版社,1992.

[3] 王正中,雷天朝,宋松柏,等.梯形断面收缩水深计算的迭代法[J].长江科学院院报,1997,9(3):15—16.

[4] 王正中,雷天朝.矩形断面收缩水深简捷计算公式[J].人民长江,1996,9(9):45—46.

A formula for quickly calculating water depth at vena contraction in parabola form channel

LU Qin[1], WANG Zheng-zhong[1,2], REN Wu-gang[1]

(1. *College of Hydraulic and Construction Engineering of Northwest A & F University*, *Yangling*, *Shaanxi* 712100, *China*; 2. *National Laboratory of Frzen Soil Engineering*, *Chinese Academy of Sciences*, *Lanzhou*, *Gansu* 730000, *China*)

Abstract: Non-dimensional iterative formulas for computing water depth at vena contraction are derived from the basic equations of water depth at vena contraction in parabola form cross section through proper mathematic-exchange. According to hydraulic characteristics, the astringency of these iteration formulas has been testified, and five approximate formulas for computing water depth at vena contraction have been obtained by using four methods. Through error analysis and a case history computed by using these formulas we can obtain the easiest formula. In the practical area of engineering, the maximum error of the water depth is not greater than 0.48 percent. These formulas are qualified, short-cut and correct, and can be widely used. They overcome the shortage of graphic chart and trial computation methods widely used in the past-time.

Keywords: water depth; parabola form channel; computation method