

覆膜侧渗沟灌二维入渗数值模拟研究

张新燕，蔡焕杰^{*}

(西北农林科技大学水利与建筑工程学院，陕西 杨凌 712100)

摘 要：根据覆膜侧渗沟灌的入渗特性，利用修正 Richards 方程对其水分入渗过程进行数值模拟研究，结合初始条件、边界条件和相关参数采用 Galerkin 有限元法进行了数值求解。经验证，所建模型具有较好的稳定性和合理性，与实际结果具有较好的一致性，且模型数值计算原理简单。为进一步研究覆膜侧渗沟灌入渗特性和地表水流运移特性及灌水技术要素优化、系统管理设计奠定了基础。

关键词：覆膜侧渗沟灌；二维入渗；数值模拟

中图分类号：S275 **文献标识码：**A **文章编号：**1000-7601(2008)06-0087-04

土壤水分入渗过程和土壤含水量的分布对地表水流运动及灌溉系统的优化设计、管理等都具有重要作用。最早研究土壤水分入渗过程的是 Coleman、Bodman^[1]，他们针对干土在积水条件下的一维垂直入渗，将土壤含水率剖面分为四个区：饱和区、过渡区、传导区、湿润区。地面灌溉中沟、畦灌的入渗均属于非饱和土壤水运动。非饱和土壤水分运动的研究开始主要集中于农业灌溉上，近年来逐渐扩展到环境上。非饱和土壤水运动基本方程是应用达西定律与质量守恒原理得出的。

在地面灌溉中，沟灌中灌水沟的水分入渗属于二维入渗(x 、 z 向)，且各点毛管吸力和重力作用不是直线关系，因此，入渗水量与入渗面不成比例，且由于沟中水深随时随地变化，导致土壤入渗水势梯度不同，还有复杂的沟断面几何形式，初始土壤含水量变化，土壤特性参数的变异大且难以测定等，使得沟灌入渗过程极其复杂，难于用物理方程描述。数值模拟可通过有限的试验推导获得更多不同条件下的结果，减小试验工作量，且对于系统管理、优化设计都具有重要作用。

研究根据覆膜侧渗沟灌入渗特性，利用修正 Richards 方程对其水分入渗进行数值模拟研究，为进一步研究覆膜侧渗沟灌地表水流运移特性及灌水技术要素优化、系统管理设计奠定基础。

1 定解方程

覆膜侧渗沟灌水分入渗属于二维非饱和土壤水

分运动，符合扩散方程：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

式中， θ 为体积含水量(cm^3/cm^3)； t 为时间(min)； x 、 z 为水平、垂直方向坐标，垂直方向向下为正方向； $D(\theta)$ 为土壤水分扩散系数(cm^2/min)； $K(\theta)$ 为土壤导水率(cm/min)。

此方程为二阶非线性抛物型偏微分方程，除少量问题外，一般情况下此方程解析求解是困难的，须用数值法求解。

2 定解条件

如图 1 所示为建立的沟灌灌水沟二维入渗模型，沟断面为对称的梯形断面，土壤为均质土壤。由于对称性计算域可简化为图 1 阴影部分所示，假定不考虑灌水期间的降雨和蒸发，沟中水体静止，忽略溶质、空气和温度对土壤水分运动的影响。

假定计算域内初始含水量均匀分布，其值为 θ_a 。计算域左右两个竖直边界 AB 、 CD 为对称线，水平通量为 0；地面线 AG 及沟底 DE 边界上垂直通量应为零；下边界 BC 上满足含水量不变条件，即为初始含水量 θ_a ；沟壁浸水部分 EF 边界符合饱和含水量 θ_0 边界条件。当沟中断水后，土壤中水分开始重新分配，沟周浸水边界消失，沟壁 EF 边界不再符合饱和含水量 θ_0 边界条件，其余边界条件保持不变，即定解条件为，

$$\textcircled{1} \theta = \theta_a \quad t = 0 \text{ 计算域 } \Omega \text{ 内} \quad (2)$$

收稿日期：2008-02-29
基金项目：国家高技术研究发展计划(863 计划)(2002AA2Z4031)；西北农林科技大学博士科研启动项目；西北农林科技大学校青年基金项目
作者简介：张新燕(1972—)，女，河南开封人，博士，副教授，主要从事节水灌溉研究。E-mail: xnvxy@nwsuaf.edu.cn。
^{*} 通讯作者：蔡焕杰(1962—)，男，河北藁城人，博士，教授，主要从事节水灌溉研究。

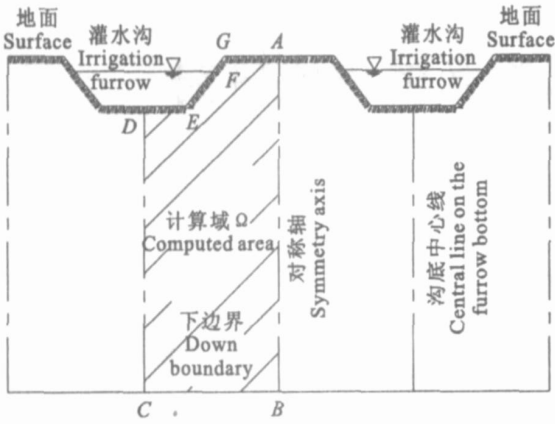


图 1 覆膜侧渗沟灌水分入渗物理模型

Fig.1 Physical model of infiltration in film covering and lateral infiltration furrow irrigation

- ① 及 $t \geq 0$ 下边界 Γ_{BC}
- ② $\theta = \theta_0$ $0 \leq t \leq t_{\text{断水}}$ 沟中浸水边界 Γ_{EF}
- ③ $-D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) = 0$ $t \geq 0$
- 地面线 Γ_{AG} 及沟底边界 Γ_{DE}
- ④ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ $t \geq 0$
- 计算域左右竖直边界 Γ_{AB}, Γ_{CD}

3 非饱和土壤水力特性

非饱和土壤水力特性采用 Van Genuchten 公式^[3]表示,

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = [1 + (\alpha h)^n]^{-m} \quad (6)$$

式中, S_e 为有效饱和度; h 为土壤基质势; n, m 为拟合常数, 且 $m = 1 - 1/n$; α 为与土壤特性有关的参数; $\theta, \theta_r, \theta_s$ 分别为土壤含水率, 残留含水率, 饱和含水率(体积比)。

4 数值计算

采用迦略金有限元方法^[6,7], 将研究计算域进行剖分, 计算域被划分为网格, 离散为 N 个单元, 记任一单元为 e , 网格交点为单元结点, 结点数为 $N + 1$ 。求解定解方程(1) 在定解条件(2) ~ (5) 下的近似解, 将试函数表示为,

$$\theta' = \sum_{n=1}^N \theta_n(t) \varphi_n(x, z) \quad (7)$$

式中, $\varphi_n(x, z)$ 为基函数; $\theta_n(t)$ 为与时间有关的待定系数。

对定解方程(1) 中非线性系数作同样线性插值函数,

$$D(\theta) = \sum_{i=1}^N D(\theta_i) \varphi_i(x, z) \quad (8)$$

$$K(\theta) = \sum_{i=1}^N K(\theta_i) \varphi_i(x, z) \quad (9)$$

式中各符号表示意义同上。

为求式(7) 中待定系数 $\theta_n(t)$, 要求定解方程(1) 与所有基函数正交,

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \right\} \varphi_m d\Omega = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

其中 Ω 为计算域。

将式(8)、(9) 代入上式(10), 整理后可得,

$$[F] \frac{d\{\theta\}}{dt} + [A]\{\theta\} = \{B\} \quad (11)$$

矩阵 $[F], [A]$ 和常数列向量 $\{B\}$ 的典型元素为,

$$F_{nm} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_i \varphi_m d\Omega \quad (12)$$

$$A_{nm} = \sum_{i=1}^N D(\theta_i) \int_{\Omega} \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) d\Omega \quad (13)$$

$$B = - \sum_{i=1}^N K(\theta_i) \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} d\Omega \quad (14)$$

该式为非线性常微分方程组, 本文用隐式差分法求解。

计算过程定义 θ 结点值时间离散为,

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \frac{\sum_e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi_n d\Omega}{\sum_e \int_{\Omega_e} \varphi_n d\Omega} \quad (15)$$

对方程(11) 用有限差分代替, 采用隐式格式(向后差分)形式, 则

$$[F] \frac{\{\theta\}_j - \{\theta\}_{j-1}}{\Delta t_j} + [A]_j \{\theta\}_j = \{B\}_j \quad (16)$$

式中, j 表示当前时段; $j - 1$ 为前一时段; 时间步长 $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ 。

上式中由于 A, B, F 都是关于 θ 的函数, 该方程为非线性方程, 不能直接求解, 需要采用数值方法求解。

结合边界条件, 取矩形单元和线性插值, 将方程(16) 化为,

$$\sum \frac{d\theta_m}{dt} \sum_{i=1}^4 \left[\frac{ab}{36} (3 + \zeta_m \zeta_i) (3 + \eta_i \eta_m) \right] +$$

$$\sum_e \sum_{n=1}^4 \theta_{ne} \sum_{i=1}^4 K(\theta_{ie}) \left\{ \begin{aligned} &\frac{b}{48a} \zeta_m \zeta_n [3 + \eta_m \eta_n + \eta_i (\eta_m + \eta_n)] \\ &+ \frac{a}{48b} \eta_m \eta_n [3 + \zeta_m \zeta_n + \zeta_i (\zeta_m + \zeta_n)] \end{aligned} \right\}$$
$$+ \sum_e \sum_{i=1}^4 \left[K(\theta_{ie}) \frac{a}{12} \eta_i (3 + \zeta_m \zeta_i) \right] = 0 \tag{17}$$

式中,下标 ie 表示在单元 e 中局部坐标编号为 i 的结
点在整体坐标中的编号; a 、 b 为矩形单元两边长的一
半; ζ_m 、 η_m 取值见表 1 所示^[2]。

表 1 ζ_m 、 η_m 取值

Table 1 value of ζ_m , η_m

取值 Value	1	2	3	4
ζ_m	-1	1	1	-1
η_m	-1	-1	1	1

采用迭代法求解上述方程,由于高斯消元法适
于求解矩阵形式的方程,拟采用高斯消元法,具体过
程为,把方程组(17)化成同解的上三角形方程组,
然后按方程相反顺序求解上三角形方程组,得出原
方程组的解。每一时间步长含水量初始值由前两个
时段的含水量通过线性插值推知,

$$\begin{cases} \theta_i^{+1,1} = \theta_i, & j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \theta_i^{+1,l} = \theta_i + \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} (\theta_i - \theta_i^{-1}), & j > 0 \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \dots, N) \tag{18}$$

经过若干次迭代,若连续两次迭代结果差值在允许
误差范围内,即

$$|\theta_i^{+1,l+1} - \theta_i^{+1,l}| \leq E \tag{19}$$

式中, E 为允许误差。

则认为最后迭代结果就是所求含水量值;否则
将含水量值 $\theta_i^{+1,l+1}$ 代回(17)式中继续迭代,直到
收敛为止。上式中 $\theta_i^{+1,l}$ 为 $j+1$ 时刻 i 结点含水量的
第 l 次迭代结果。

5 实验结果与数值计算结果比较

相应于本文覆膜侧渗沟灌入渗实验,计算域 Ω
尺寸如图 2 所示,土壤为陕西杨凌壤土,土壤容重
 1.35 g/cm^3 ,计算中采用土壤初始含水量为 $\theta_a =$
 15.39% (体积),浸水边界处饱和含水量为 $\theta_0 =$
 45.09% (体积),土壤水分特性参数土壤水分扩散率
 $D(\theta)$ 采用 Bruse 和 Klute(1956)提出的水平土柱渗
析法^[1],土壤非饱和导水率 $K(\theta)$ 采用垂直下渗通
量法^[1,3~5]进行测定,得,

$$D(\theta) = 0.251 \times 10^3 \theta^{5.695}$$
$$K(\theta) = 0.492 \times 10^3 \theta^{12.5} \tag{20}$$

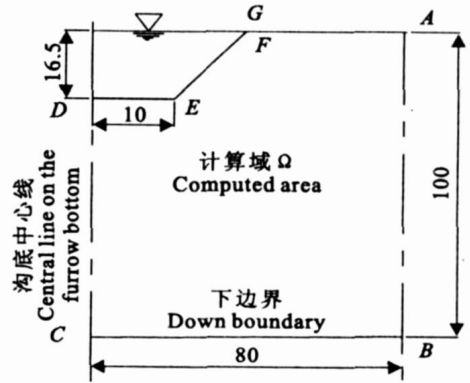


图 2 计算域尺寸示意图

Fig.2 Computed area size

如图 2 所示沟中水深为 16.5 cm,其定解条件可
写为,

① $\theta = \theta_a = 0.1539 \text{ cm}^3/\text{cm}^3 \quad t = 0$
 $0 \leq x \leq 80 \quad 0 \leq z \leq 100 \tag{21}$

及 $t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 80 \quad z = 100$
② $\theta = \theta_0 = 0.4509 \text{ cm}^3/\text{cm}^3 \quad 0 \leq t \leq t_{\text{断水}}$
 $10 \leq x \leq 26.5 \quad 0 \leq z \leq 16.5 \tag{22}$

③ $-D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) = 0 \quad t \geq 0$
 $26.5 \leq x \leq 80 \quad z = 0$
 $0 \leq x \leq 10 \quad z = 16.5 \tag{23}$

④ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0$
 $0 \leq z \leq 100 \quad x = 80$
 $16.5 \leq z \leq 100 \quad x = 0 \tag{24}$

时间步长取为:

$$\Delta t_{j+1} = 1.5 \Delta t_j (\text{min}) \leq 3\,000 \text{ min}$$
$$\Delta t_0 = 5 \text{ min}$$

取允许误差 $E = 0.5\%$ 。

模拟结果如图 3 所示。由图可以看出,模拟数
据与实测数据具有较好的一致性。仅在近地表附近
二者的出入较大,原因是在试验时填装土过程中,由
于人为因素使试验用土壤表层容重较底层土壤容重
有所减小,且水面略低于地表而造成的。

6 结 论

本文利用修正 Richards 方程对覆膜侧渗沟灌
水分二维入渗过程进行了数值模拟研究,数值模型
中非饱和土壤水力特性采用 Van Genuchten 公式表
示,并采用迦略金有限元方法对定解方程进行了数
值计算。数值模拟结果与实测数据相比较,证明所建

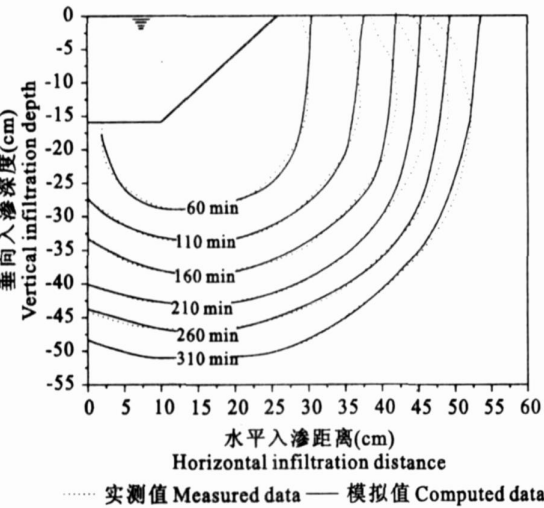


图 3 土壤入渗模拟结果图

Fig.3 Computed infiltration

立的数学模型与实际结果具有较好的一致性,且模

型数值计算原理简单。该模型可为进一步研究覆膜侧渗沟灌地表水流运移特性及灌水技术要素优化、系统管理设计奠定基础。

参 考 文 献:

[1] 雷志栋,杨诗秀,谢森传.土壤水动力学[M].北京:清华大学出版社,1988.

[2] Huyakorn P S. Techniques for making finite element competitive in modeling flow in variably saturated porous media[J]. Water Resour. Res., 1984, 20(8):1099—1115.

[3] 康绍忠,梁银丽,蔡焕杰.旱区水—土—作物关系及其最优调控原理[M].北京:中国农业出版社,1998.

[4] 郭元裕.农田水力学[M].北京:中国水利水电出版社,1997.

[5] 汪志农.灌溉排水工程学[M].北京:中国水利水电出版社,2000.

[6] 刘 钰,惠士博.畦灌水流运动的数学模型及数值计算[J].水利学报,1987,(2):1—10.

[7] 惠士博,赵 卫,张思聪.畦灌水流的零惯量模型[J].清华大学学报(自然科学版),1994,34(2):53—62.

Numerical simulating study on two-dimension infiltration of Film-covering Bed Furrow Irrigation(FBFI)

ZHANG Xin-yan, CAI Huan-jie *

(College of Water Resources and Architectural Engineering,
Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: Based on the infiltrating character of FBFI, mathematical models are developed to simulate infiltrating of FBFI by the use of the modified Richards' equation. Combined with initial condition, boundary condition and relative parameter, numerical solution is obtained by Galerkin finite element method. The founded model is steadier and reasonable and well agreed with the data obtained from field irrigation experiment by validating. It establishes the base for futtther studying infiltration characteristic and surface flow moving characteris-
tic, irrigation technical parameter optimization, system management and design, etc.

Keywords: Film-covering Bed Furrow Irrigation(FBFI); two-dimension infiltration; numerical simulating