圆形断面临界水深新近似计算式

李 蕊1,王正中2,王志刚3

(1.杨凌职业技术学院,陕西杨凌 712100; 2.西北农林科技大学水工程安全与病害防治研究中心,陕西杨凌 712100;3.西北农林科技大学,陕西杨凌 712100)

摘 要:针对目前圆形断面临界水深普遍采用的试算法、图表法存在计算误差大、适用范围小的缺点,提出一种新的近似计算公式。通过对圆形断面临界流公式的数学变换,得到其临界水深的数学模型,并采用最小二乘法进行编程计算,得到了一种求解圆形断面临界水深的新近似直接计算公式。实例计算及误差分析表明,在工程实用范围内该公式最大相对误差小于1%。与现有圆形断面临界水深的计算公式比较,该计算公式计算便捷且适用范围广,可供工程实际参考应用。

关键词:数学建模;水力计算;临界水深

中图分类号: TV131.4 文献标志码: A 文章编号: 1000-7601(2013)04-0054-03

A new approximate formula of critical water depth in circular cross-section

LI Rui¹, WANG Zheng-zhong², WANG Zhi-gang³

(1. Yangling Vocational and Technical College, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2. Research Center of Water Engineering Safety and Disease Prevention, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

3. Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: Aimed at the problems of large error and narrow applicable scope exiting in the trial and diagram methods generally used, a new approximate formula of critical water depth in circular cross-section was proposed. The mathematical model of critical water depth was set up through the mathematical transformation of critical flow formula in circular cross-section, and the new approximate formula of critical water depth in circular cross-section was obtained by using least squares for programming computation. The example computation and error analysis indicated that the largest relative error of this formula was smaller than 1% in the practical scope of project. Compared with the existing formula of critical water depth in circular cross – section, the new formula is more convenient in computation and broader in applicable scope, and it can be applied for reference in engineering practices.

Keywords: mathematics model; hydraulic computation; critical water

圆形断面是输水隧洞常见的断面形式之一,由 于它的水流条件比较好,被广泛应用在农田灌排、水 利水电及城市给水排水等工程中。圆形断面临界水 深在水力计算中是一个非常重要的水力要素,但其 求解非常困难,因为需计算含参数的高次方程,理论 上没有直接的解析解,因此工程上常采用试算法或 图解法来完成求解工作。试算法在计算上较为麻 烦,在查曲线时也容易产生一定的误差,影响精度。 图解法是利用已经制好的图表求解,计算比较快捷, 但精度欠佳。目前对于圆形断面临界水深的计算主 要有:孙建等^[1]、王正中等^[2]分别提出的临界水深直 接计算式及吕宏兴等^[3]提出的迭代算法。以上方法 在工程界都得到了不同程度的运用,解决了不少工 程实际问题。但上述方法中直接计算公式仍然存在 精度不高或公式结构相当复杂的问题,而迭代算法 又存在收敛速度慢的问题,不便于工程界直接采用。

数学建模就是将现实生活中的实际问题的内在 规律,抽象为数学问题,构建数学模型,根据数学知 识进行推理、证明、求解、得出结论,并进行验证,使 实际问题得以合理解决。简单说就是数学知识在实 际问题中的应用。

本文用数学建模的方法,提出一种圆形断面临

收稿日期:2013-02-10

设

界水深新的近似直接计算公式。首先通过对圆形断 面临界流公式的数学变换,建立起求解圆形断面临 界水深的数学模型,然后应用最小二乘法对此模型 进行编程求解,得到了圆形断面临界水深的近似直 接计算公式。最后通过实例和误差分析对模型的结 果(即本文提出的公式)进行了验证,结果表明该公 式计算简捷、精度高且适用范围广。

1 圆形断面临界水深的基本方程

由参考文献[4]知,临界流的基本方程为:

$$\frac{\mathrm{a}Q^2}{\mathrm{g}} = \frac{A_c^3}{B_c} \tag{1}$$

如图1所示,圆形断面的水力要素分别为:

过水断面面积 $A_c = \frac{1}{8} d^2 (\theta - \sin \theta)$ (2) 水面宽度 $B_c = d \sin(\theta/2)$ (3)

K曲妃皮
$$B_c = d \sin(0/2)$$
 (5

$$h_c = \frac{1}{2}d(1 - \cos\frac{\theta}{2})$$

(4)

其中, Q 为流量(m³ · s⁻¹); A_c 为临界流对应的过水 断面面积(m²); B_c 为水面宽(m); g为重力加速度(通 常取 9.81 m · s⁻²); a 为流速分布不均匀系数(通常 取 1.0); θ 为临界水深对应的圆心角(rad); d 为洞径 (m)。

将式(2)、(3)、(4)代入式(1)得:

$$\frac{a}{512} \frac{(\theta - \sin\theta)^3}{\sin(\theta/2)} = \frac{Q^2}{gd^5}$$
(5)



图1 圆形过水断面

Fig.1 Circular water cross-section

2 临界水深方程分析

要求临界水深 h_c,必须分两步完成。

第一步: 通过式 (5) 即
$$\frac{a}{512} \frac{(\theta - \sin\theta)^3}{\sin(\theta/2)} = \frac{Q^2}{gd^5} \Rightarrow \theta$$

第二步:通过
$$h_c = \frac{1}{2}d(1 - \cos\frac{\theta}{2}) \Rightarrow h_c$$

对于式(5) 即 $\frac{a}{512}\frac{(\theta - \sin\theta)^3}{\sin(\theta/2)} = \frac{Q^2}{gd^5}$ 可变形为:
 $\frac{a}{512}\frac{(\theta - \sin\theta)^3}{\sin(\theta/2)} = \frac{Q^2}{gd^5} = 0$ (6)

由此可见,式(6) 是关于θ的一个含参数超越方 程,且未知量包含在三角函数中,理论上无解析解。 工程上对于此类方程的求解常采用查图表、试算等 低效且低精度的方法。

3 临界水深模型的建立与求解

$$k = \frac{Q^2}{\mathrm{g}d^5} = \frac{a}{512} \frac{(\theta - \sin\theta)^3}{\sin(\theta/2)} \tag{7}$$

$$x = \frac{h_c}{d} = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\theta}{2})$$
 (8)

则 k 可认为是无量刚参数, x 可认为是圆形断面无量刚临界水深。由式(7)、(8)得到:

$$x = \phi(\theta), \theta = g(k) \Longrightarrow x = f(k)$$
 (9)

根据文献[5]~[8]以及工程实际的要求, x 的取值 范围一般在[0.05,0.85]内,因此在该范围内,通过 Matlab 数学软件对大量 $x \sim k$ 数据进行处理,发现 $\ln(x) \sim \ln(k)$ 有明显的线性关系,于是采用最小二 乘法拟合 $\ln(x) \sim \ln(k)$ 的函数关系(图 2)。



图 2
$$\ln(x) \sim \ln(k)$$
的函数图

Fig. 2
$$\ln(x) \sim \ln(k)$$
 function diagram

$$\ln(x) = 0.2554\ln(k) + 0.0215$$
(10)

对上式进行变形得:

$$\ln(x) = \ln(k)^{0.254} + \ln(e)^{0.0215} = \ln[(e)^{0.0215} \cdot$$

$$(k)^{0.2554}$$
] = ln(1.0217 $k^{0.2554}$) (11)

所以, $x = 1.0217k^{0.2554}$ (12)

$$h_c = 1.0217 k^{0.2554} \times d \tag{13}$$

4 精度评价

4.1 近几年得到的近似公式

近几年不少专家得到的计算圆形断面临界水深的近似公式很多,但从公式结构简捷、通用、计算精度相对较高这三方面考虑,孙建公式^[1]和王正中公式^[2]相对较好,下面就其公式形式和本文公式作一比较:

① 孙建公式
$$\begin{cases} h_c = d(0.102541(\frac{k}{32})^{0.5} + 0.95714(\frac{k}{32})^{0.25}), k \in (0, 1.938] \\ h_c = d(-0.41581(\frac{k}{32}) + 1.57351(\frac{k}{32})^{0.25} - 0.182354), k \in (1.938, 16.141] \end{cases}$$

② 王正中公式 $h_c = d(\frac{k}{29})^{\frac{1}{3.9}}$ ③ 本文公式 $h_c = 1.0217k^{0.2554} \times d$

4.2 公式误差计算

根据文献[5]~[8]以及工程实际的要求, *x* 的 取值范围一般为[0.05,0.85]。

为了便于比较,分别计算出本文公式、孙建公式 和王正中公式在此范围内的相对误差,其结果见图 3。



图 3 不同公式计算圆形断面临界水深相对误差分布 Fig.3 Distribution of relative errors of critical water depth in circular cross-section calculated by different formula

根据图 3,无量纲临界水深 x 在[0.05,0.85]范 围内,本文公式计算圆形断面临界水深的最大相对 误差小于 1%,孙建公式、王正中公式的最大相对误 差分别为 0.3% 和 1.3%。 从公式结构上来看,孙建公式最为复杂,王正中 公式和本文公式较为简捷。

从公式的适用范围上来看,孙建公式、王正中公 式和本文公式都能满足工程实际要求。

由此可知本文公式结构简捷,误差小,适应范围 广。

5 求解步骤与实例

5.1 求解步骤

第一步,由式(7)求得无量纲参数 $k:k = \frac{Q^2}{gd^5}$ 。 第二步,再根据式(13)即 $h_c = 1.0217k^{0.2554} \times d$ 求临界水深。

5.2 实例

某圆形断面的引水式电站输水隧洞,洞径 d = 15.0 m,求设计流量 $Q = 500 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 时的临界水 深^[5]。

解:第一步,由式(7)求得无量纲参数 $k:k = \frac{Q^2}{gd^5} = 0.0335$

第二步,再根据式(13) 得: $h_c = 1.0217k^{0.2554} \times d = 6.4395$ m

用孙建公式和王正中公式分别计算本例,结果 见表1。

表 1 不同近似公式误差比较

Table 1	Comparison	of	errors	in	different	approximate	formu	la
Table 1	Companson	or	citors	111	uncient	approximate	ionnu	10

公式名称 Formula	流量/(m ³ ·s ⁻¹) Flow	临界水深/m Critical water depth	临界水深精确解/m Exact solution of critical water depth	相对误差/% Relative error
孙建公式 Sun's formula	500	6.4267	6.4275	-0.012
王正中公式 Wang's formula	500	6.4425	6.4275	0.233
本文公式 New formula	500	6.4395	6.4275	0.187

从例题的计算过程和表1的误差比较可以看出,用本文近似公式求解圆形断面临界水深,仅需两步就可完成,过程简单,而且相对误差为0.187%,能满足工程实际需要。

6 结 语

本文在分析圆形断面临界水深方程数学特性的 基础上,建立起数学模型,然后运用最小二乘法对此 模型进行求解,最后提出了圆形断面临界水深的近 似直接计算公式。并与现有的计算公式分别从适用 范围、误差大小和简捷程度方面进行了综合评价。 结果表明,本文公式在无压流圆形断面常用范围内 均可适用,而且计算精度高,在工程常用范围内相对 误差小于1%,公式简捷程度与几种计算公式相比 最为简捷,完全能够满足工程需要。 饰,这有待从分子水平去进一步证明。此外,NO也可能通过影响 AQP 基因转录水平和蛋白丰度而发生作用^[20]。可见,NO可能从活性和含量两方面调节 AQP 的状态,进而调节种子的萌发。

参考文献:

- Koornneef M, Bentsink L, Hilhorst H. Seed dormancy and germination
 [J]. Current Opinion in Plant Biology, 2002,5(1):33-36.
- [2] Finch-Savage WE, Leubner-Metzger G. Seed dormancy and the control of germination[J]. New Phytologist, 2006, 171:501-523.
- [3] Holdsworth MJ, Finch Savage WE, Grappin P, et al. Post-genomics dissection of seed dormancy and germination[J]. Trends in Plant Science, 2008,13(1):7-13.
- [4] Angelovici R, Galili G, Fernie AR, et al. Seed desiccation: a bridge between maturation and germination [J]. Trends in Plant Science, 2010, 15(4):211-218.
- [5] Manz B, Muller K, Kucera B, et al. Water uptake and distribution in germinating tobacco seeds investigated in vivo by nuclear magnetic resonance imaging[J]. Plant Physiol, 2005, 138:1538-1551.
- [6] Fukuhara T, Kirch HH, Bohnert HJ. Expression of Vp1 and water channel proteins during seed germination [J]. Plant Cell Environ, 1999,22:417-424.
- [7] Johnson KD, Hofte H, Chrispeels MJ. An intrinsic tonoplast protein of protein storage vacuoles in seeds is structurally related to a bacterial solute transporter (GlpF)[J]. Plant Cell, 1990,2:525-532.
- [8] Maurel C, Chrispeels MJ, Lurin C, et al. Function and regulation of seed aquaporins[J]. J Exp Bot, 1997,48:421-430.
- [9] Gao YP, Young L, Bonham Smith P, et al. Characterization and expression of plasma and tonoplast membrane aquaporins in primed seed of Brassica napus during germination under stress conditions[J]. Plant Mol Biol, 1999,40(4):635-544.
- [10] Willigen CV, Postaire O, Tournaire-Roux C, et al. Expression and inhibition of aquaporins in germinating Arabidopsis seeds[J]. Plant cell physiology, 2006,47(9):1241-1250.
- [11] Nelson DC, Flematti GR, Ghisalberti EL, et al. Regulation of seed germination and seedling growth by chemical signals from burning veg-

_------

(上接第56页)

参 考 文 献:

- [1] 孙 建,李 宇.圆形和U形断面明渠临界水深直接计算公式
 [J].陕西水力发电,1996,12(3):39-42.
- [2] 王正中,陈 涛,万 斌,等.圆形断面临界水深的新近似计算 公式[J].长江科学院院报,2004,21(2):15-17.
- [3] 吕宏兴,把多铎,宋松柏.无压流圆形断面水力计算的迭代法 [J].长江科学院院报,2003,20(5):15-17.
- [4] 吴持恭.水力学[M].北京:高等教育出版社,1979.

 $\mathsf{etation}[\,J]$. Annu Rev Plant Biol, 2012,63:107-130.

- [12] Sarath G, Hou G, Baird LM, et al. Reactive oxygen species, ABA and nitric oxide interactions on the germination of warm-season C4grasses[J]. Planta, 2007, 226:697-708.
- [13] Keeley JE, Fotheringham CJ. Trace gas emissions and smoke-induced seed germination[J]. Science, 1997,276:1248-1250.
- [14] Beligni MV, Lamattina L. Nitric oxide stimulates seed germination and de-etiolation, and inhibits hypocotyl elongation, three light-inducible responses in plants[J]. Planta, 2000,210(2):215-21.
- [15] 孙永刚,张 帆,聂 理,等.外源一氧化氮供体对渗透胁迫下 小麦种子萌发和水解酶活性的影响[J].植物生理与分子生物 学学报,2005,31(3):241-246.
- [16] Sarath G, Bethke PC, Jones R, et al. Nitric oxide accelerates seed germination in warm – season grasses [J]. Planta, 2006, 223(6): 1154-1164.
- [17] Bethke PC, Libourel IG, Vitecek J, et al. Nitric oxide methods in seed biology[J]. Methods Mol Biol, 2011,773:385-400.
- [18] Sirova J, Sedlarova M, Piterkova J, et al. The role of nitric oxide in the germination of plant seeds and pollen[J]. Plant Sci, 2011, 181 (5):560-572.
- [19] Liu Y, Shi L, Ye N, et al. Nitric oxide-induced rapid decrease of abscisic acid concentration is required in breaking seed dormancy in Arabidopsis[J]. New Phytol, 2009, 183:1030-1042.
- [20] Liu HY, Yu X, Cui DY, et al. The role of water channel proteins and nitric oxide signaling in rice seed germination [J]. Cell Res, 2007, 17(7):638-649.
- [21] Maurel C, Verdoucq L, Luu DT, et al. Plant aquaporins: membrane channels with multiple integrated functions[J]. Annu Rev Plant Biol, 2008, 59:595-624.
- [23] Astier J, Rasul S, Koen E, et al. S-nitrosylation: an emerging posttranslational protein modification in plants [J]. Plant Sci, 2011, 181 (5):527-533.
- [24] Tanou G, Job C, Rajjou L, et al. Proteomics reveals the overlapping roles of hydrogen peroxide and nitric oxide in the acclimation of citrus plants to salinity[J]. Plant Journal, 2009,60(5):795-804.

- [5] 赵延风,宋松柏,李 宇.圆形断面明渠临界水深的近似计算公式[J].水利水电科技进展,2008,28(2):62-64.
- [6] 张文卓.圆形断面临界水深计算[J].四川水力发电,2002,21 (1):15-17.
- [7] 邹武停,辛全才,张宽地.基于牛顿迭代法的圆形断面临界水深 直接计算法[J].水电能源科学,2012,30(3):100-102.
- [8] 武汉水利电力学院.水力计算手册[M].北京:水利电力出版 社,1983.